Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

Soluzioni del $1^{\underline{o}}$ Esonero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
27–01–07 A.A. 2006/2007

Esercizio n.1 È standard. Si può guardare il primo esonero dello scorso anno. Il risultato è A: $z_1 + 2z_2 = 8 - i$, $z_2 + 2z_2 = 7 + i$, B: $z_1 + 2z_2 = 8 + 3i$, $z_2 + 2z_2 = 7 + 3i$, C: $z_1 + 2z_2 = 8 + i$, $z_2 + 2z_2 = 7 - i$, D: $z_1 + 2z_2 = 8 - 3i$, $z_2 + 2z_2 = 7 - 3i$,

Esercizio n.2. $v(x,y)$ è della forma $ax + by + cxy$ per cui, dalla relazione $u_x = v_y$ si ricava $u(x,y) = bx + \frac{1}{2}cx^2 + h(y)$. Poi dalla relazione $u_y = -v_x$ si ha $h'(y) = -a - cy$ ossia $h(y) = -ay - \frac{1}{2}cy^2$ e quindi $u(x,y) = bx - ay + \frac{1}{2}cx^2 - \frac{1}{2}cy^2$.
A: $u(x,y) = x - 2x^2 + 2y^2$, B: $u(x,y) = x - x^2 + y^2$ C: $u(x,y) = -2x + x^2 - y^2$ D: $u(x,y) = 2x + x^2 - y^2$

Esercizio n.3 Ciascuna funzione poteva scriversi come $(\frac{a}{z} + \frac{b}{z^2})\Big(\frac{A}{z_1 - z} + \frac{B}{z_2 - z}\Big)$. La funzione è olomorfa in tutti i punti tranne $z = 0$, $z = z_1$, $z = z_2$. In $z = 0$ la prima parentesi è data da una funzione singolare e già sviluppata in serie di Lautent. La seconda è una funzione olomorfa in $z = 0$. Lo sviluppo di Laurent richiesto è pari a

$$(\frac{a}{z} + \frac{b}{z^2})\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \left(\frac{A}{z_1}(z_1)^{-k} + \frac{B}{z_2}(z_2)^{-k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{k-1}\left(\frac{aA}{z_1}(z_1)^{-k} + \frac{aB}{z_2}(z_2)^{-k}\right) +$$

$+\sum_{k=0}^{+\infty} z^{k-2}\left(\frac{bA}{z_1}(z_1)^{-k} + \frac{bB}{z_2}(z_2)^{-k}\right)$. La serie converge per $0 < |z| < \min\{|z_1|, |z_2|\}$. Chiaramente non è una serie di Taylor. Il residuo dellla funzione è $\frac{aA}{z_1} + \frac{aB}{z_2} + \frac{bA}{(z_1)^2} + \frac{bB}{(z_2)^2}$. Per calcolare il residuo (la funzione ha un polo di ordine 2), si poteva pure usare la regola $\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z)$

A: $\frac{9+2i}{(7+i)^2} = \frac{23}{125} - \frac{3}{250}i$ B: $-\frac{6}{25} + \frac{3}{10}i$ C: $\frac{-46-3i}{250}$ D:= $\frac{3+2i}{2i-11} = \frac{1}{50} - \frac{i}{10}$

Supponiamo che z_1 sia il punto più vicino a $z = 0$. Scriviamo la funzione come $(\frac{a}{z} + \frac{b}{z^2})\frac{A}{z_1 - z} + (\frac{a}{z} + \frac{b}{z^2})\frac{B}{z_2 - z}$. La seconda è analitica in $z = z_1$ e quindi non contribuisce al residuo in $z = z_1$. La prima è data fa prodotto di una funzione analitica in $z = z_1$ e di una funzione che ha un polo di ordine 1 in $z = z_1$. Il residuo è $-\Big(\frac{a}{z_1} + \frac{b}{z_1^2}\Big)A$

A:= $\frac{3+2i}{(-11+2i)^2} = \frac{-29-28i}{125}$ B: $\frac{23}{25} - \frac{14}{10}i$ C: $\frac{29-28i}{125}$ D: $-\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$

Esercizio n.4 Ciascun integrale è del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ax+b}{x^4 + A^4}dx$ e quindi $I = 2\pi i(Resf(z_0) + Resf(z_1)$ dove $z_0 = Ae^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_1 = Ae^{i\frac{3}{4}\pi}$). $Resf(z_i) = \lim_{z\to i}(z - z_i)f(z)$ (usando il teorema de l'Hopital) si ottiene $I = -2\pi i(\frac{az_0^2 + bz_0}{4A^3} + \frac{az_1^2 + bz_1}{4A^3}) = \frac{b\sqrt{2}}{2A^3}\pi$.

Esercizio n.5 Compito A. Conviene scrivere $\int_\gamma f(z)dz + \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt = 2\pi i Resf(i)$ da cui $\int_\gamma f(z)dz = -\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt + 2\pi i Resf(i) = \frac{2\pi i}{2i} - \arctan\Big|_{-1}^{1} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Compito B. Gli stessi calcoli portano a $I = \frac{2\pi i}{2i} - \arctan\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} =$

Compito C. Gli stessi calcoli portano a $I = \frac{2\pi i}{2i} - \arctan\Big|_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi =$

Compito D. $\int_\gamma f(z)dz + \int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2}dt = 2\pi i Res f(-i)$ da cui $\int_\gamma f(z)dz = -\int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2}dt + 2\pi i Res f(-i) =$
$-\frac{2\pi i}{2i} - \arctan\Big|_1^{-1} = -\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{2}\pi$